Concours Centrale - Supélec 1995

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Option TA

On se propose d'étudier une fonction F définie comme intégrale d'une fonction f_u dépendant d'un paramètre u. Dans la partie I, on détaille certaines propriétés de la fonction f_u, dans la partie II, certaines propriétés de la fonction F ; dans la partie III, on montre que F est développable en série entière. Ces trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I - Étude de la fonction f_u

Pour tout nombre réel u, on considère la fonction $f_u :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_u(x) = x^{-u}\sqrt{1+x}$$

et on note C_u sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

I.A - Montrer que les courbes C_u admettent un point commun et donner les coordonnées de ce point.

I.B - Pour $u < u'$, préciser la position relative de C_u et $C_{u'}$.

I.C -

I.C.1) Déterminer l'ensemble D des nombres réels u tels que f_u admette un prolongement par continuité en 0. Pour $u \in D$, on note désormais f_u et C_u la fonction f_u précédente et sa courbe représentative ainsi prolongées par continuité.

I.C.2) Pour $u \in D$, étudier la demi-tangente à C_u au point d'abscisse 0. Illustrer les résultats par des dessins.

I.D - Déterminer l'ensemble D' des nombres réels u tels que C_u admette un point à tangente horizontale d'abscisse non nulle.

I.E - Dessiner sur une même figure les différentes formes des courbes C_u qu'a fait apparaître l'étude précédente. Tracer notamment C_0 et $C_{\frac{1}{2}}$ et en préciser la nature géométrique.

Partie II - Étude de la fonction F

On considère la fonction $F : u \mapsto \int_0^1 f_u(x)\,dx$.

II.A - Montrer que le domaine de définition de F est l'ensemble $\Delta =]-\infty, 1[$ et que F est croissante sur Δ.

II.B - Calculer

II.B.1) $F(0) = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$,

II.B.2) $F(-1) = \int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$.

II.C -

II.C.1) Supposant $u < 0$, écrire, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre $F(u)$ et $F(u+1)$.

II.C.2) Que devient cette relation pour $u = -1$? Le résultat est-il compatible avec ceux obtenus en II.B - ?

II.D -

II.D.1) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1+x$ et en déduire un encadrement de $F(u)$.

II.D.2) À partir de cet encadrement déterminer $\lim_{u \to 1^-} F(u)$ et un équivalent de $F(u)$ quand u tend vers 1^-.

II.E -

II.E.1) Déterminer $\lim_{u \to -\infty} F(u)$.

II.E.2) Montrer que, pour tout $u \in \Delta$, on a :

$$F(u) = \frac{\sqrt{2}}{1-u} - \frac{1}{2(1-u)} G(u)$$

où

$$G(u) = \int_0^1 \frac{x^{1-u}}{\sqrt{1+x}} dx .$$

II.E.3) En déduire, par une majoration convenable de $G(u)$, $\lim_{u \to -\infty} G(u)$ puis un équivalent de $F(u)$ quand u tend vers $-\infty$.

II.F - Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormal.

Partie III - Développement en série entière de F

Dans cette partie, on utilise la fonction G introduite en II.E.2) ainsi que la relation liant F et G.

III.A - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 (-\ln x)^n dx$$

III.A.1) Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

III.A.2) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.

III.A.3) En déduire la valeur de I_n.

III.B - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} (-\ln x)^n dx .$$

III.B.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n est défini et vérifie $0 \leq b_n \leq 1$.

III.B.2) En déduire que la série de terme général $b_n u^n$ est absolument convergente pour tout $u \in]-1, 1[$.

On admet qu'alors $G(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n$.

III.C - Montrer que, pour tout $u \in]-1, 1[$, on peut écrire $F(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$ et exprimer les coefficients a_n au moyen des coefficients b_n.

••• FIN •••